第2章　非线性方程的数值解法

简单迭代法

1. 简单迭代法
   - 简单迭代法
   - 简单迭代法的收敛性定理

2. 本讲小结

简单迭代法

将方程 $f(x) = 0$ 改写成等价方程

$$x = \varphi(x) \tag{2.2-1}$$

其中$\varphi(x)$是连续函数. 从某个初始值 x_0 开始, 对应(2.2-1) 构造迭代公式(格式)

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, \cdots \tag{2.2-2}$$

这就可以确定序列 $\{x_k\}$ $(k = 0, 1, \cdots)$.

如果 $\{x_k\}$ 有极限 $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$, 则由(2.2-2)两边取极限可得 $x^* = \varphi(x^*)$, 此时我们称 x^* 为 $\varphi(x)$ 的**不动点**(Fixed Point).

简单迭代法

易见不动点 x^* 是 $x = \varphi(x)$ (也即 $f(x) = 0$)的根.

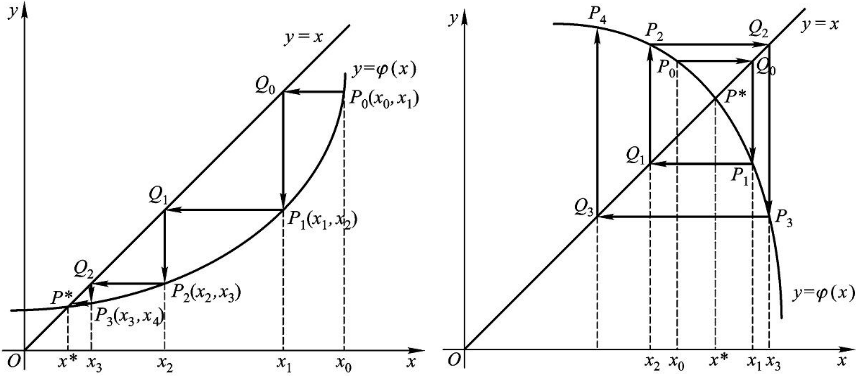
这时称迭代公式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 是收敛的.

实际计算中, 按精度要求取某个迭代值 x_k 作为原方程的近似值.

这种求根的方法称为**简单迭代法(Simple-Iteration Method)**, 其中 $\varphi(x)$ 称为**迭代函数(Iteration Function)**.

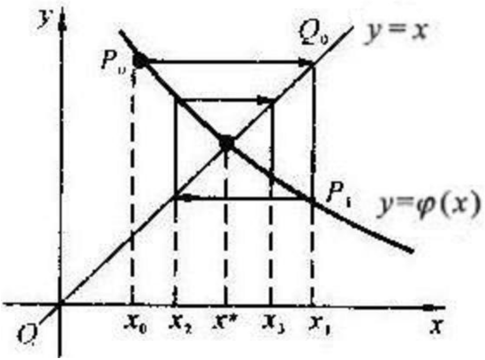
简单迭代法的几何意义

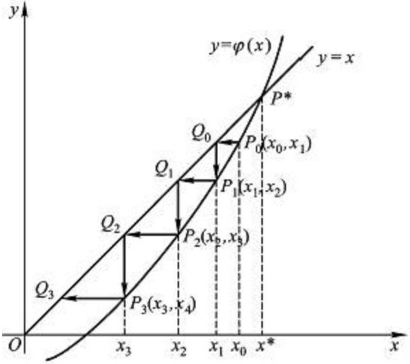
方程$x = \varphi(x)$的根对应于直线$y = x$与曲线$y = \varphi(x)$的交点. 从初值x_0出发的迭代过程如图2-1中箭头所示路径.



简单迭代法的几何意义

方程$x=\varphi(x)$的根对应于直线$y=x$与曲线$y=\varphi(x)$的交点. 从初值x_0出发的迭代过程如图2-1中箭头所示路径.





简单迭代法的算法描述

入口参数: 初始近似值x_0, 精度要求ε, 最大迭代次数N

返回参数: 近似解或失败信息

$n \leftarrow 1$;

while $n \le N$ **do**

　　$x \leftarrow \varphi(x_0)$;

　　if $|x - x_0| < \varepsilon$ **then**

　　　　return x;

　　endif

　　$n \leftarrow n + 1$;　　$x_0 \leftarrow x$;

endwhile

return False;　　//超出最大迭代次数

end.

例2-2

用简单迭代法求解方程

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

在[1, 2]内的一个实根.

解法1 将方程改写成等价形式:

形式0: $$x = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$$

即取迭代函数$\varphi_0(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$, 从而可得迭代公式

$$x_{k+1} = \varphi_0(x_k) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_k^3}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

再取$x_0 = 1.5$, 将精度为10^{-7}的迭代计算结果如下表:

例

n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
0	1.5000000	7	1.3638870	13	1.3652059	19	1.3652296
1	1.2869538	8	1.3659167	14	1.3652424	20	1.3652302
2	1.4025408	9	1.3648782	15	1.3652237	21	1.3652299
3	1.3454584	10	1.3654101	16	1.3652333	22	1.3652301
4	1.3751703	11	1.3651378	17	1.3652284	23	1.3652300
5	1.3600942	12	1.3652772	18	1.3652309	24	1.3652300
6	1.3678470						

由于$|x_{23} - x_{24}| < 0.0000001 = 10^{-7}$, 所以可取$x_{24} = 1.3652300$ 作为根的近似值.

例

解法2 将方程 $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 改写为等价形式:

形式1: $$x = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$$

得迭代公式

$$x_{k+1} = \varphi_1(x_k) = \sqrt{\frac{10}{x_k} - 4x_k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

例

也取$x_0 = 1.5$, 迭代计算结果如下表:

n	$\frac{10}{x_{n-1}} - 4x_{n-1}$	$x_n = \sqrt{\frac{10}{x_{n-1}} - 4x_{n-1}}$
0		1.5000000
1	0.666667	0.816497
2	8.981462	2.996909
3	-8.650864	

x_3为负数开方, 计算无法继续进行.

例

解法3 将方程 $x^3+4x^2-10=0$ 改写为等价形式:

形式2: $$x=x-x^3-4x^2+10$$

得迭代公式

$$x_{k+1}=\varphi_2(x_k)=x_k-x_k^3-4x_k^2+10,\quad k=0,1,2,\cdots$$

例

同样取$x_0 = 1.5$, 迭代计算结果如下表:

n	x_n
0	1.5000000
1	-0.875
2	6.732422
3	-469.720012
4	1.0275×10^8
5	-1.0849×10^{24}

迭代序列并不收敛.

简单迭代法的收敛性定理

定理 2-1 (不动点定理, **Fixed Point Theorem**)

设迭代公式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 中的迭代函数$\varphi(x)$在区间$[a, b]$上连续, 且满足条件:

(a) (**映内性**) 当$a \leq x \leq b$时, 有

$$a \leq \varphi(x) \leq b \tag{2.2-3}$$

(b) (**压缩性**) 存在常数$\boxed{0 < L < 1}$(L称为压缩系数), 使得

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b] \tag{2.2-4}$$

(续下页)

简单迭代法的收敛性定理

(承上页)

则

(1) 函数φ在$[a,b]$上存在唯一不动点x^*;

(2) 对任意初值$x_0 \in [a,b]$, 迭代公式(2.2-2)收敛于x^*;

(3) 迭代值有误差估计式

$$\boxed{\begin{aligned} |x^* - x_k| &\le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \\ |x^* - x_k| &\le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \end{aligned}}$$

(2.2-5)

(2.2-6)

证明

证明(做为“理解”)

(1) 先证存在性. 由$a \le \varphi(x) \le b$, 若$\varphi(a) = a$或$\varphi(b) = b$, 则a或b就是$\varphi(x)$的不动点, 否则有$\varphi(a) > a, \varphi(b) < b$, 作辅助函数

$$\Psi(x) = \varphi(x) - x$$

显然$\Psi \in C[a, b]$, 且有

$$\Psi(a) = \varphi(a) - a > 0, \quad \Psi(b) = \varphi(b) - b < 0$$

根据连续函数的性质, 至少存在一点$x^* \in (a, b)$满足$\Psi(x^*) = 0$, 即$x^* = \varphi(x^*)$. 这就是说, 方程$x = \varphi(x)$的根存在.

证明

再证唯一性(用反证法).

若方程$x=\varphi(x)$有两个不同的根$x_1^*, x_2^* \in [a,b]$, 则由已知条件(2.2-4)(即“压缩性”)可得

$$|x_1^* - x_2^*| = |\varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)| \le L|x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*|$$

矛盾, 因此方程只能有一个根.

证明

(2) 要证迭代公式(2.2-2)收敛, 只需证序列$\{x_k\} \subset [a,b]$ 且

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

首先, 由条件(2.2-3)(即映内性)可知每一个$x_k \in [a,b]$, 所以 $\{x_k\} \subset [a,b]$.

其次, 由条件(2.2-4)(即压缩性)可得

$$|x^* - x_k| = |\varphi(x^*) - \varphi(x_{k-1})| \leq L|x^* - x_{k-1}| \leq L^2|x^* - x_{k-2}| \leq \cdots \leq L^k|x^* - x_0|$$

注意到$0 < L < 1$, 因此$\lim_{k\to\infty} |x^* - x_k| = 0$, 即$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.

证明

(3) 从$x_{k+1} - x_k$出发, 并利用(2)中的推导, 有

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| &= |(x^* - x_k) - (x^* - x_{k+1})| \geq |x^* - x_k| - |x^* - x_{k+1}| \\ &\geq |x^* - x_k| - L|x^* - x_k| = (1 - L)|x^* - x_k| \end{aligned}$$

于是

$$|x^* - x_k| \leq \frac{1}{1 - L}|x_{k+1} - x_k|$$

又注意到

$$|x_{k+1} - x_k| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}| \leq L^2|x_{k-1} - x_{k-2}| \leq \cdots \leq L^k|x_1 - x_0|$$

可得

$$|x^* - x_k| \leq \frac{1}{1 - L}|x_{k+1} - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L}|x_1 - x_0|$$

□

应用不动点定理时应注意以下几点

(1) 定理中压缩性条件(b)也可换为更强的条件, 即

设φ在$[a, b]$上连续, 在(a, b)上可导, 且存在常数$0 < L < 1$, 使得

$$\boxed{|\varphi'(x)| \le L}, \quad \forall x \in (a, b) \tag{2.2-7}$$

这是因为, 如果(2.2-7)成立, 由中值定理,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)||x - y| \le L|x - y|$$

其中ξ介于x与y之间, 即条件(2.2-4)必然成立.

由于通常考虑的初等函数多是可导的, 所以实际应用中一般都采用式(2.2-7)来判别迭代函数的压缩性.

应用不动点定理时应注意以下几点

特别需要注意的是, 要实实在在地找到这个常数L, 使得

$$|\varphi'(x)| \le L, \quad \forall x \in (a,b)$$

或

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x-y|, \quad \forall x, y \in [a,b]$$

成立, 而不能简化为

$$|\varphi'(x)| < 1, \quad \forall x \in (a,b)$$

或

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < |x-y|, \quad \forall x, y \in [a,b].$$

应用不动点定理时应注意以下几点

(*) 由定理证明(2)中的不等式和(2-2-7)后面的公式知, 若存在常数$L \geq 1$, 使得

$$|\varphi'(x)| \geq L, \quad \forall x \in (a, b)$$

或

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \geq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b]$$

成立, 则迭代必发散.

应用不动点定理时应注意以下几点

$$|x^* - x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \tag{2.2-5}$$

(2) 由误差估计式(2.2-5)可见, 若$\boxed{|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon}$, 则

$$|x_k - x^*| < \frac{L}{1-L}\varepsilon$$

所以当$\boxed{0 \le L \le \frac{1}{2}}$, 即$\frac{L}{1-L} \le 1$时, $\boxed{|x_k - x^*| < \varepsilon}$;

而当$\frac{1}{2} < L < 1$时 , $\frac{L}{1-L} > 1$, 特别是L很靠近1时, $\frac{L}{1-L}$会趋于∞, 此时$|x_k - x^*| \ge \varepsilon$, 甚至会趋于无穷, 即$x_k$作近似根误差可能会很大.

这种情况下, 可由

$$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| < \varepsilon$$

解出满足精度要求所需的最少迭代次数进行迭代.

应用不动点定理时应注意以下几点

在实际问题中，有时很难确定L的值.

因此在工程问题的计算中，常常不考虑L的情况，而将迭代结束条件直接简化为

只要$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$，就认为有$|x_k - x^*| < \varepsilon$.

例2-3

用简单迭代法求解方程

$$x - \ln x = 2 \ (x > 1)$$

要求相对误差小于$\varepsilon = 10^{-8}$.

解 先确定方程的有根区间. 令$f(x) = x - \ln x - 2$, 则$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. 因此, 对$x > 1$有$f'(x) > 0$, 即$f(x)$在$(1, \infty)$上单调增加.

由此可知方程在$(1, \infty)$最多只有一个根.

例

经计算

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 1-\ln 1-2=-1<0, \\
f(2) &= 2-\ln 2-2=-\ln 2<0, \\
f(3) &= 3-\ln 3-2=1-\ln 3<0, \\
f(4) &= 4-\ln 4-2=2-2\ln 2>0
\end{aligned}
$$

可知$[3,4]$为方程的有根区间.

例

将方程改写为$x = 2 + \ln x$, 则有迭代函数$\varphi(x) = 2 + \ln x$. 当$x \in [3, 4]$时, φ满足

$$3 \leq \quad 2 + \ln 3 \leq \varphi(x) \leq 2 + \ln 4 \quad \leq 4$$

和

$$\boxed{|\varphi'(x)| = \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{3} < 1}$$

故对任意的$x_0 \in [3, 4]$, 由不动点定理, 迭代公式

$$x_{k+1} = 2 + \ln x_k, \quad k = 0, 1, \cdots$$

收敛于方程的根. 取$x_0 = 3$实际计算, 并同时计算相对误差 $\Delta = |x_k - x_{k-1}|/|x_k|$, 结果如下表所示.

例

k	x_k	Δ	k	x_k	Δ
0	3		8	3.1461774524	0.0000107563
1	3.0986122887	0.0318246620	9	3.1461882088	0.0000034189
2	3.1309543624	0.0103297813	10	3.1461916276	0.0000010867
3	3.1413378662	0.0033054400	11	3.1461927143	0.0000003454
4	3.1446487812	0.0010528727	12	3.1461930597	0.0000001098
5	3.1457022086	0.0003348783	13	3.1461931695	0.0000000349
6	3.1460371430	0.0001064623	14	3.1461932044	0.0000000111
7	3.1461436110	0.0000338408	15	3.1461932155	0.0000000035

注意到$\Delta = 0.35 \times 10^{-8} < \varepsilon$, 故取$x^* \approx x_{15} \approx 3.146193216.$

说明

不动点定理也叫压缩映像原理, 是用来保证简单迭代法收敛的. 但迭代函数的构造和迭代区间的选取都是无"定"章可循的.

如方程$x = \ln(x+2)$和$x = \mathrm{e}^x - 2$是等价的, 它们的两个解分别落在区间$[0, 2]$和$[-1.9, -1]$中.

易验证, 在$[0, 2]$中应用迭代法时只能使用前一种迭代形式, 而在$[-1.9, -1]$中应用迭代法时只能使用后一种迭代形式.

另上例也说明, 对某些迭代函数, 适当调整迭代区间后也可能使迭代收敛.

本讲小结

熟练掌握:
简单迭代法，不动点定理.

熟悉: 迭代函数的构造方法.

了解: 动点原理的证明.