第2章 非线性方程的数值解法

加速收敛迭代法与Newton迭代法

局部收敛性

不动点定理给出简单迭代法对区间$[a,b]$上任何一个初值x_0的收敛性, 称**为全局收敛性** (Global Convergence). 当已知不动点的近似值, 欲求其更精确的近似值时, 常考虑局部收敛性.

定义2-1

设$\varphi(x)$在某区间有不动点x^*, 若存在 x^*的一个邻域

$$S = \{x \mid |x - x^*| < \delta\} \subset [a,b],$$

使得迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$对于任意初值$x_0 \in S$均收敛, 则称此迭代过程**局部收敛(Local Convergence)**.

局部收敛性定理

定理2-2

设x^*为$\varphi(x)$的不动点, $\varphi'(x)$在x^*的某邻域连续, 且$|\varphi'(x^*)| < 1$, 则迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$局部收敛.

证明 由$|\varphi'(x^*)| < 1$和$\varphi'(x)$的连续性知, $\exists 0 < L < 1$及$\delta > 0$使得当$|x - x^*| < \delta$时$|\varphi'(x)| \le L < 1$. 对任意的$x \in S = \{x|\ |x - x^*| < \delta\}$, 由微分中值定理知

$$|\varphi(x) - x^*| = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - x^*| \le L|x - x^*| < |x - x^*| < \delta$$

(其中ξ介于x与x^*间), 所以有$\varphi(x) \in S$, 即φ在区间$[x^* - \delta, x^* + \delta]$满足不动点定理的条件. 故由$x_{k+1} = \varphi(x_k)$生成的序列$\{x_k\}$对任意$x_0 \in S$均收敛于$x^*$. □

例2-5

构造不同迭代法求$x^2 - 3 = 0$的根$x^* = \sqrt{3}$.

解 (1) $x_{k+1} = \dfrac{3}{x_k}\ (k = 0, 1, \cdots)$, $\varphi(x) = \dfrac{3}{x}$, $\varphi'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$, $\varphi'(x^*) = -1$, 不满足定理2.3的条件, 不能保证收敛.

(2) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{1}{4}(x_k^2 - 3)\ (k = 0, 1, \cdots)$, $\varphi(x) = x - \dfrac{1}{4}(x^2 - 3)$, $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x$, $\varphi'(x^*) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.134 < 1$, 迭代收敛.

(3) $x_{k+1} = \dfrac{1}{2}(x_k + \dfrac{3}{x_k})\ (k = 0, 1, \cdots)$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{3}{x})$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{3}{x^2})$, $\varphi'(x^*) = 0$, 迭代也收敛.

例

若取$x_0 = 2$, 分别用以上三种迭代计算, 结果见下表:

	法1	法2	法3		法1	法2	法3
x_0	2	2	2	x_5	1.5	1.732056	1.732051
x_1	1.5	1.750000	1.750000	x_6	2.0	1.732052	1.732051
x_2	2.0	1.734375	1.732143	x_7	1.5	1.732051	1.732051
x_3	1.5	1.732361	1.732051	x_8	2.0	1.732051	1.732051
x_4	2.0	1.732092	1.732051	x_9	1.5	1.732051	1.732051

从计算结果可知迭代法(1)不收敛, (2)和(3)收敛. 在迭代法(3)中, $\varphi'(x^*) = 0$, 故收敛最快.

收敛阶

迭代过程收敛速度体现为迭代误差$e_k = x_k - x^*$随着k的增加而下降的快慢, 它通过**收敛阶**(Order of Convergence)来描述.

定义 2-2

设迭代过程产生的序列$\{x_k\}$收敛于根x^*, 记迭代误差为$e_k = x_k - x^*$, 如果存在实数$p \geq 1$和非零常数C, 使得

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$$

则称迭代过程是 p 阶收敛的, C称为渐近误差常数.

收敛阶

特别的, $p = 1$时称为**线性收敛**(Linear Convergence); $p = 2$称为**平方收敛或 2 阶收敛**(Quadratic Convergence); $p > 1$时统称为**超线性收敛**(Super Linear Convergence).

p 的大小反映了$\{x_k\}$收敛速度的快慢, p 越大收敛越快.

线性收敛

定理2-3

如果x^*是φ的不动点, φ'在x^*邻域连续且$\varphi'(x^*) \neq 0$, 则迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$在x^*的邻域是线性收敛的.　　　$|\varphi'(x^*)| < 1$

证明　由

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x^* = \varphi(x_k) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi_k)e_k$$

其中ξ_k在x^*和x_k之间, 故有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = |\varphi'(x^*)| \neq 0$$

按照定义可知迭代过程是线性收敛的. □

p阶收敛

定理 2-4

如果x^*是φ的不动点, 对整数$p>1$, 迭代函数φ及其 p 阶导数在x^*邻域上连续, 且满足

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$$

$$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$$

则迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$在x^*的邻域是 p 阶收敛的, 且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$$

Aitken加速法

假设$\{x_k\}$线性收敛, 则按线性收敛的定义有

$$\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}\approx C_k\neq 0$$

及

$$\frac{x_{k+2}-x^*}{x_{k+1}-x^*}\approx C_{k+1}\neq 0$$

由于序列$\{C_k\}$收敛, 所以当k充分大时, 可期望$C_k\approx C_{k+1}$, 故有

$$\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}\approx\frac{x_{k+2}-x^*}{x_{k+1}-x^*}$$

从中可解出

Aitken加速法

$$x^* \approx \frac{x_{k+2}x_k - x_{k+1}^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} = x_{k+2} - \frac{(x_{k+2} - x_{k+1})^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} \qquad (2.4\text{-}1)$$

或

$$x^* \approx x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} \qquad (2.4\text{-}2)$$

这表明, 当由某种迭代计算出迭代序列$\{x_k\}$之后, 用(2.4-1)或(2.4-2)的值作为x^*的新的近似值, 并记为$\bar{x}_k$, 可望有更好的近似效果. 于是得到Aitken加速方案:

$$\bar{x}_k = x_{k+2} - \frac{(x_{k+2} - x_{k+1})^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

例

例2-2'

先用迭代公式

$$x_{k+1} = \varphi_0(x_k) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_k^3},\ (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

求方程

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

在[1, 2]内的近似根, 再用Aitken公式进行加速.

解 取$x_0 = 1.5$, 由简单迭代法直接计算到第24项, 然后利用Aitken加速法加速, 计算结果如下表:

例

n	x_n(简单迭代)	$\bar{x}_n$(Aitken加速)	n	x_n(简单迭代)	$\bar{x}_n$(Aitken加速)
0	1.5000000	1.3618865	8	1.3659167	1.3652299
1	1.2869538	1.3643291	9	1.3648782	1.3652300
2	1.4025408	1.3649991	10	1.3654101	1.3652300
3	1.3454584	1.3651689	11	1.3651378	1.3652300
4	1.3751703	1.3652141	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
5	1.3600942	1.3652258	22	1.3652301	1.3652300
6	1.3678470	1.3652289	23	1.3652300	
7	1.3638870	1.3652297	24	1.3652300	

简单迭代法解到$x_{24} \approx x_{23} \approx 1.3652300$, 采用Aitken加速计算到$x_{12}$, 就可求得$\bar{x}_{10} \approx \bar{x}_9 \approx 1.3652300$, 且每个$\bar{x}_k$都比$x_k$更接近$x^*$.

Steffensen迭代法

通过把改进的Aitken方法应用于根据不动点迭代所得到的线性收敛序列, 即利用加速后的近似值进行下次迭代, 可以将收敛速度加速到二阶. 这个方法称为Steffensen迭代法:

$$\begin{cases} \text{迭代：} & y_k = \varphi(x_k) \\ \text{再迭代：} & z_k = \varphi(y_k) \\ \text{加速：} & x_{k+1} = x_k - \dfrac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \end{cases} \tag{2.4-3}$$

记

$$\Psi(x) = x - \frac{[\varphi(x) - x]^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x}$$

则以上迭代过程可以简记为

$$x_{k+1} = \Psi(x_k)$$

Steffensen迭代法的算法描述

入口参数: 初值 x_0; 精度要求ε; 最大迭代次数N

返回参数: 近似解或失败信息

$n \leftarrow 1$;

while $n \le N$ **do**

　　$y \leftarrow \varphi(x_0)$;　　$z \leftarrow \varphi(y)$;　　$x \leftarrow x_0 - \dfrac{(y - x_0)^2}{z - 2y + x_0}$;

　　if $(|x - x_0| < \varepsilon)$　**then**　**return** x;

　　endif　　// 输出近似解

　　$n \leftarrow n + 1$;

　　$x_0 \leftarrow x$;

endwhile

return False; //超出最大迭代次数

end.

例2-2”

仍取$\varphi_0(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$, 用Steffensen迭代法求它在[1, 2]内不动点的近似值.

解 取$x_0 = 1.5$, 计算结果如下表:

n	x_n(简单迭代)	x_n(Steffensen)	n	x_n(简单迭代)	x_n(Steffensen)
0	1.5000000	1.5000000	6	1.3678470	1.3652262
1	1.2869538	1.3618865	7	1.3638870	1.3652290
2	1.4025408	1.3644357	8	1.3659167	1.3652297
3	1.3454584	1.3650115	9	1.3648782	1.3652299
4	1.3751703	1.3651742	10	1.3654101	1.3652300
5	1.3600942	1.3652152	11	1.3651378	★**1.3652300**

例2-6

求解方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$在$x_0 = 1.5$附近的根.

解 若将原方程改写为$x = x^3 - 1$, 由此构造迭代法

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{2.4-4}$$

易知以上简单迭代法不收敛(请自己思考为什么).

取$x_0 = 1.5$, 采用简单迭代法和Steffensen迭代法分别计算, 迭代结果如下表:

例

n	x_n(简单迭代)	y_n(Steffensen)	z_n	x_n(Steffensen)
0	1.5000000			1.5000000
1	2.3750000	2.3750000	12.3964844	1.4162930
2	12.3964844	1.8409220	5.2388728	1.3556504
3	1.9040028×10^3	1.4913983	2.3172707	1.3289488
4	6.9024414×10^9	1.3470629	1.4443512	1.3248045
5	3.2885783×10^{29}	1.3251735	1.3271173	1.3247180
6	3.5565143×10^{88}	1.3247180	1.3247180	1.3247179
7	$4.4985617 \times 10^{265}$	1.3247178	1.3247170	1.3247180

迭代法解到x_7即可得到近似解1.32472.

Newton 迭代法

假定x^*是方程$f(x)=0$的根, x_0是它的一个近似值, 并设$f(x)$, $f'(x)$和$f''(x)$在根x^*附近连续. 将$f(x)$在x_0展开得

$$0 = f(x^*) = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x^* - x_0)^2$$

其中ξ在x_0与x^*之间. 若$f'(x_0) \neq 0$则有

$$x^* = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''(\xi)}{2f'(x_0)}(x^* - x_0)^2 \qquad (2.5\text{-}1)$$

忽略(2.5-1)式最后一项, 则可得到x^*一个新的近似值

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Newton 迭代法

用x_1代替上式右端的x_0, 并设$f'(x_1) \neq 0$, 于是又得到新的近似值

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

如此继续, 假定$f'(x_k) \neq 0$ $(k = 0, 1, \cdots)$, 我们有

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{2.5-2}$$

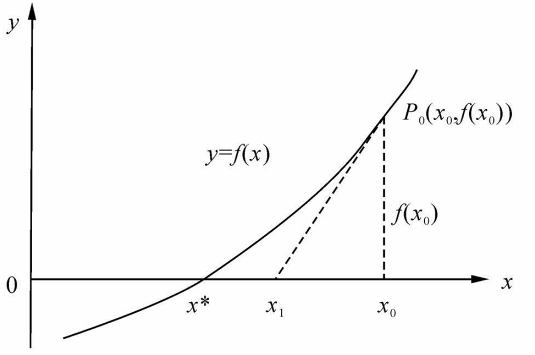
式(2.5-2)称为Newton迭代公式. 在迭代序列收敛的情况下, 取满足一定精度条件的迭代值x_k作为方程的根x^*的近似值, 就是Newton迭代法(或Newton-Raphson迭代法).

Newton迭代的几何意义

实际上, 式(2.5-2)也是曲线$y=f(x)$在点$(x_k,f(x_k))$处的切线

$$y=f'(x_k)(x-x_k)+f(x_k)$$

与x轴的交点所满足的方程. 因此, Newton迭代的几何意义就是“用切线代替曲线”, 故而也叫切线法. 迭代过程如图:



Newton 迭代法

可见, 它以在x^*附近将函数$f(x)$线性化为基础, 并以$f'(x_k) \neq 0$ $(k = 0, 1, \cdots)$为前提.

Newton法依赖于$f'(x)$和$f''(x)$的连续性, 且如果存在某个k, 使$f'(x_k) = 0$, 则Newton迭代法就不能继续下去. 实际上, 如果在x^*附近满足$|f'(x)| > M$ (其中M为某一充分大常数), 则迭代效果最好.

Newton迭代的算法描述

入口参数： 初值 x_0;

对解的精度要求ε_1;

对函数值约等于零的精度ε_2;

最大迭代次数N

返回参数： 近似解或失败信息

Newton迭代的算法描述

$n \leftarrow 1$; $F_0 \leftarrow f(x_0)$; $dF_0 \leftarrow f'(x_0)$;

while $n \le N$ **do**

  if $(dF_0 = 0)$ **then** **return** False;

  endif // 无法迭代

  $x_1 \leftarrow x_0 - F_0/dF_0$; $F_1 \leftarrow f(x_1)$; $dF_1 \leftarrow f'(x_1)$;

  if $(|x_1 - x_0| < \varepsilon_1$ OR $|F_1| < \varepsilon_2)$ **then** **return** x_1;

  endif // 输出近似解

  $n \leftarrow n + 1$;

  $x_0 \leftarrow x_1$; $F_0 \leftarrow F_1$; $dF_0 \leftarrow dF_1$;

endwhile

return False; //超出最大迭代次数

end.

例2-7

用Newton迭代法求下面方程的近似根

$$xe^x - 1 = 0$$

解 令$f(x) = xe^x - 1$, 则$f'(x) = e^x(1 + x)$，于是得到迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k e^{x_k} - 1}{e^{x_k}(1 + x_k)}, \quad k = 0, 1, \cdots$$

取$x_0 = 0.5$, 计算结果如下：

$$x_0 = 0.5,\ \ x_1 = 0.57102,\ \ x_2 = 0.56716,\ \ x_3 = 0.56714,\ \ \cdots$$

故方程的近似根为$x^* \approx 0.5671$.

1. 局部收敛性
2. 加速收敛迭代法
3. Newton 迭代法
4. 本讲小结

本讲小结

熟练掌握:

Newton迭代法.

熟悉:

收敛阶的概念.

了解:

理解局部收敛性, 加速收敛迭代.